Exercice 1 (3 points) :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point A(0 , 0 , 1), le plan (P) d'équation : $2x + y - 2z + 4 - 7 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0, 3, -2)$ et dé rayon R = 3

0,5 1) a) Montrer que : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P)

0,5 b) Vérifier que H(2 , 1 , -1) est le point d'intersection du plan (P) et de la droite (Δ)

0,75 2) a) Montrer que : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$. Où $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

0,5 b) Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3

0,75 c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à a sphère (S) et vérifier que H est le point de tangence

Exercice 2 (3 points) :

On considère le suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 5$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$

0,75 1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 2$

2) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$

1 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1

0,75 b) Ecrire v_n en fonction de n, puis en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 + \frac{3}{n}$

0,5 c) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 (3 points) :

Lors d'un concours de recrutement, un candidat droit tirer sans remise et successivement deux question parmi 10 questions proposées : 8 questions de mathématiques et 2 questions de français

1) On considère les événements : A : « Tirer deux questions de français »
B : « tirer deux questions de matières différentes »

1,5 Montrer que : $p(A) = \frac{1}{45}$ *et* $p(B) = \frac{16}{45}$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de questions de français tirées

0,25 a) Vérifier que les valeurs prise par X sont 0 , 1 , 2

1,25 b) Montrer que : $p(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de X

Exercice 4 (3 points) :

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$

0,75 2) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points A , B , C , D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$
Montrer : $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$, et en déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω

3) Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M', image du point M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1 a) Montrer que : $z' = iz + 1 - i$ et vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$

0,5 b) Montrer que les point A , B , C , D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre

Exercice 5 (3 points) :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Et soit (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm)

0,75 1) Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat

0,75 2) a) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

0,5 b) En déduire que la courbe (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

1 3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x)$ puis vérifier que : $f'(0) = 0$

0,5 b) Montrer que : $\forall x \geq 0$, $e^x - 1 \geq 0$ et $\forall x \leq 0$, $e^x - 1 \leq 0$

1,25 c) Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

0,75 4) a) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, +\infty[$ et que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

0,75 b) Tracer la courbe (C_f) (on admet que (C_f) possède un point d'inflexion unique et on ne demande pas de déterminer ce point)

0,75 5) En intégrant par parties, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\, dx = \frac{1}{4}$

1 6) Calculer en cm², la partie du plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$